OPCIÓN A

A.1.- Sean **A** y **B** las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.Es fácil comprobar que ambas tiene el máximo rango, que es 3. Pero ¿qué ocurre si los combinamos linealmente?.En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ

$$A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda&\lambda\\0&2\lambda&0\\\lambda&\lambda&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda+1\\0&2\lambda+2&0\\\lambda+1&\lambda+1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A+\lambda B|=\begin{vmatrix}1&\lambda&\lambda+1\\0&2\lambda+2&0\\\lambda+1&\lambda+1&0\end{vmatrix}=2(\lambda+1)^3\Rightarrow Si\ |A+\lambda B|=0\Rightarrow 2(\lambda+1)^3=0\Rightarrow\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{-1\}\Rightarrow rang(A+\lambda B)=3\Rightarrow$$

$$Si\ \lambda=1$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang(A-B)=1$$

A.2 Sea **H** la hipérbola de ecuación **xy = 4.** Sea $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ dos circunferencias, ambas con centro el origen de coordenadas y tales que

I) $\mathbf{C_1}$ es tangente a la hipérbola

II) $\mathbf{C_2}$ corta a la hipérbola **H** en un punto con abcisa **1**

a) Representar gráficamente las tres cónicas anteriores

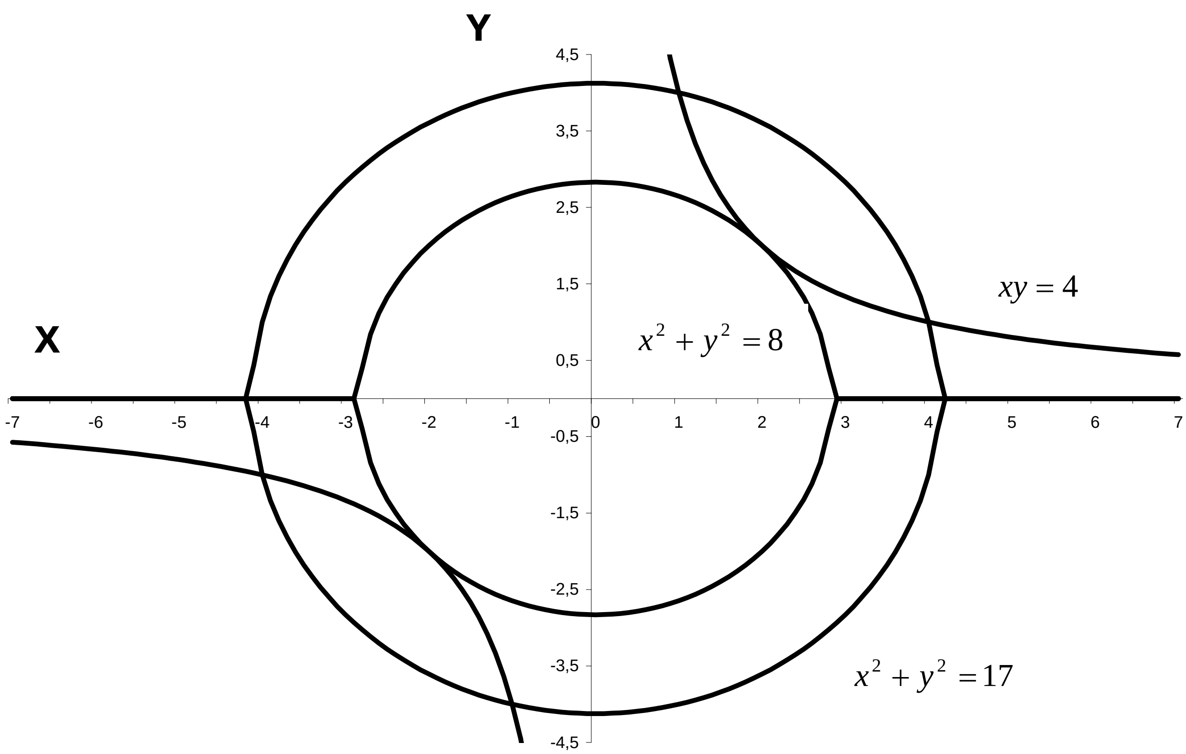
b) Calcula el área de la corona circular encerrada entre las dos circunferencias

$a)$

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{x}\Rightarrow y'=-\dfrac{4}{x^2} \\ x^2+y^2=R^2\Rightarrow 2x+2y.y'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{x}{\frac{4}{x}}=-\dfrac{x^2}{4} \end{array}\right. \Rightarrow -\frac{4}{x^2}=-\frac{x^2}{4}\Rightarrow x^4=16\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{16}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow (2\,,2)\Rightarrow R^2=2^2+2^2=8 \\ x=-2\Rightarrow y=\dfrac{4}{-2}=2\Rightarrow (-2\,,-2)\Rightarrow R^2=(-2)^2+(-2)^2=8 \end{array}\right. \Rightarrow C_1\equiv x^2+y^2-8=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{1}=4\Rightarrow (1\,,4) \\ x^2+y^2=S^2 \end{array}\right. \Rightarrow S^2=1^2+4^2=17\Rightarrow\Rightarrow C_2\equiv x^2+y^2-17=0$$



$c)$

$$A=\pi S^2-\pi R^2=\pi\left(S^2-R^2\right)=\pi(17-8)=9\pi\ u^2$$

A.3.- Sea la función $f(x) = x \cos x$

a)¿Tiene límite en $+\infty$? (justifica tu respuesta)

b) Calcula la integral de **f** entre **x = 0** y el primer cero positivo que tiene la función

Nota: *Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula*

$a)$

$$f(x) = x \cos x \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = arc \cos 0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi\, k \,; k \in Z \end{cases}$$

Al ser cíclicamente un cero de la función desde menos infinito a infinito no puede haber un límite definido ya que cada vez que aumenta x aumenta el valor.

El teorema de Rolle dice que "siendo **f(x)** una función continua en **[a , b]** y que verifica que **f(a) = f(b)**, entonces existe, al menos un punto $c \in (a\,,\,b)$ tal que **f'(c) = 0**

Este teorema se cumple en los intervalos:

$$\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2}\,,\frac{3\pi}{2}\right],\ldots\left[\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi\,,\frac{\pi}{2}+k\pi\right];\,k \in Z$$

por lo tanto hay, al menos un punto, entre ellos $c \in \left(\dfrac{\pi}{2}+(k-1)\pi\,,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right);\,k \in Z$ en donde

f'(c) = 0 (máximo o mínimo relativos) por lo tanto su limite nunca llegara a ser infinito o menos infinito

$b)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = [x\ sen\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\ sen\ \frac{\pi}{2} - 0\ sen\ 0\right) + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0.0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x\, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x\, dx = sen\ x \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} + (0-1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

A.4.- En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula, razonadamente, la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

$$\begin{cases} 2a+2b=2 \Rightarrow a+b=1 \Rightarrow b=1-a \\ A=a.b=a.(1-a)=a-a^2 \end{cases} \Rightarrow A'=\frac{dA}{da}=1-2a \Rightarrow A'=0 \Rightarrow 1-2a=0 \Rightarrow 1=2a \Rightarrow a=\frac{1}{2}\ m.$$

$$A''=\frac{d^2A}{da^2}=-2 \Rightarrow Máximo \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}\ m. \\ b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ m. \end{cases} \Rightarrow A_{max}=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot\frac{1}{2}\cdot 100=\frac{1}{4}\cdot 10000=2500\ €$$

OPCIÓN B

B.1.- Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{cases}$

a) Clasifícalo según el valor del parámetro **a**

b) Halla, si existe, la solución cuando **a = 0**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a-3-3+2a^2 = 2a^2+4a-6 = 2\left(a^2+2a-3\right) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2+2a-3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4+12 = 16 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ a = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall x \in \Re - \{-3\,,1\} = rang(A) = 3 = \text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 15 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sist. Comp. Indeterminado}$$

$$3y+z=0 \Rightarrow z=-3y \Rightarrow x-y+3y=0 \Rightarrow x=-2y \Rightarrow \text{Solución}(-2\lambda\,,\lambda\,,-3\lambda)$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 6z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$y+\frac{1}{6}=1 \Rightarrow y=\frac{5}{6} \Rightarrow 2x+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow 2x=-\frac{4}{6} \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow \text{Solución}\left(-\frac{1}{3}\,,\frac{5}{6}\,,\frac{1}{6}\right)$$

B.2. a) Hallar, razonadamente, la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos **(2 , 0)** y **(0 , 1)**

b) Entre todas estas circunferencias halla la ecuación de aquélla o aquéllas cuyo centro equidista de los ejes coordenados

a) Es la mediatriz del segmento formado por los puntos dados. Tomando como punto genérico **(x , y)** tenemos:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}\Rightarrow (x-2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Rightarrow$$

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-2y+1\Rightarrow -4x+4+2y-1=0\Rightarrow r\equiv 4x-2y-3=0$$

$b)$

$$\begin{cases}4x-2y-3=0\\ x=y\end{cases}\Rightarrow 4x-2x-3=0\Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$R=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Rightarrow R^2=\frac{10}{4}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}\Rightarrow\frac{(2x-3)^2}{4}+\frac{(2y-3)^2}{4}=\frac{10}{4}\Rightarrow 4x^2-12x+9+4y^2-12y+9-10=0\Rightarrow$$

$$4x^2+4y^2-12x-12y+8=0\Rightarrow C\equiv x^2+y^2-3x-3y+2=0$$

B.3.- Sea la función **f** definida para todo número real **x** en la forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & si \quad x<0 \\ sen\ \beta x+\cos\ \beta x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de β para que **f** sea derivable en **x = 0**

b) Calcular la integral de **f** sobre el intervalo $\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

a) Tiene que ser continua y derivable

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0^2+3.0+1=1 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=sen\ \beta.0+\cos\ \beta.0=sen\ 0+\cos\ 0=1 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1\Rightarrow Continua$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x<0 \\ \beta\cos\ \beta x-\beta\ sen\ \beta x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=2.0+3=3 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\beta\ \cos\ \beta.0-\beta\ sen\ \beta.0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=3 \\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\beta\ \cos\ 0-\beta\ sen\ 0=\beta.1-\beta.0=\beta \end{cases}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\beta=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=3\Rightarrow$$

$$\beta=3\Rightarrow Derivable\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & si \quad x<0 \\ sen\ 3x+\cos\ 3x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$b)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(sen\ 3x+\cos\ 3x)\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\ 3x\ dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\ 3x\ dx=\frac{1}{3}\int_0^{\pi} sen\ t\ dt+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos\ t\ dt=-\frac{1}{3}[\cos\ t]_0^{\pi}+\frac{1}{3}[sen\ t]_0^{\pi}$$

$$3x=t\Rightarrow dx=\frac{dt}{3}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\pi \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(sen\ 3x+\cos\ 3x)\ dx=-\frac{1}{3}\cdot(\cos\ \pi-\cos\ 0)+\frac{1}{3}\cdot(sen\ \pi-sen\ 0)=-\frac{1}{3}\cdot[(-1)-1]+\frac{1}{3}\cdot(0-0)=\frac{2}{3}$$

B.4,- Sea la función $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x-1}$

a) Determinar su dominio, es decir, el conjunto de puntos donde está definida

b) Estudiar sus máximos y mínimos (si los tiene) en el intervalo **(-1 , 1)**, precisando si son absolutos o relativos respecto al intervalo indicado

$a)$

$$\begin{cases} x+1=0\Rightarrow x=-1 \\ x-1=0\Rightarrow x=+1 \end{cases}\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{-1\,,1\}$$

$b)$

$$f(x)=\frac{x-1-4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1-4x-4}{(x+1)(x-1)}=\frac{-3x-5}{(x+1)(x-1)}=-\frac{3x+5}{x^2-1}$$

$$f'(x)=-\frac{3(x^2-1)-2x(3x+5)}{(x^2-1)^2}=-\frac{3x^2-3-6x^2-10x}{(x^2-1)^2}=-\frac{-3x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2+10x+3}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow 3x^2+10x+3=0\Rightarrow\Delta=100-36=64>0\Rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{-10+8}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{-10-8}{6}=-3\Rightarrow -3\notin(-1\,,1) \end{cases}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{(6x+10)(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x.(3x^2+10x+3)}{(x^2-1)^4}=\frac{(6x+10)(x^2-1)-4x.(3x^2+10x+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{6x^3-6x+10x^2-10-12x^3-40x^2-12x}{(x^2-1)^3}=\frac{-6x^3-30x^2-18x-10}{(x^2-1)^3}=(-2)\cdot\frac{3x^3+15x^2+9x+5}{(x^2-1)^3}$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^3+15\left(-\frac{1}{3}\right)^2+9\left(-\frac{1}{3}\right)+5}{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1\right]^3}=(-2)\cdot\frac{-\frac{3}{27}+\frac{15}{9}-\frac{9}{3}+5}{\left(\frac{1}{9}-1\right)^3}=(-2)\cdot\frac{-\frac{1}{9}+\frac{5}{3}+2}{\left(-\frac{8}{9}\right)^3}=$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right)=(-2)\cdot\frac{\frac{-1+15+18}{9}}{-\frac{512}{729}}=(-2)\cdot\frac{\frac{32}{9}}{-\frac{512}{729}}=\frac{81}{8}>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}-\frac{4}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}-\frac{4}{-\frac{4}{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}\Rightarrow En\left(-\frac{1}{3}\,,\frac{9}{2}\right)\text{ hay un Mínimo absoluto porque}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}-\frac{4}{-1-1}=\infty+2=\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{1+1}-\frac{4}{0^-}=2-(-\infty)=\infty\end{cases}$$